e-ISSN: 2307-2121

ARTICULO ORIGINAL

https://doi.org/10.51431/bbf.v12i1.920

Aprendizaje del concepto: espacio vectorial, bajo el enfoque de las estructuras mentales

Concept learning: vector space, under the mental structures approach

Héctor Alexis Herrera Vega[1], Mirtha Sussan Trejo de Ríos[1], Medalit Nieves Salcedo Rodríguez[1], Víctor Huanca Sullca[2], Jaime Augusto Pinto Borja[1], Juan Carlos Broncano Torres[1]

RESUMEN

Objetivo: Evaluar el aprendizaje del concepto de espacio vectorial en los estudiantes de la Facultad de Ingeniería Industrial, Sistemas e Informática bajo el enfoque de estructuras mentales. **Metodología:** La investigación es cuantitativa, de tipo prospectivo y exploratorio. La muestra de estudio incluyó a 75 estudiantes de Ingeniería Industrial y Sistemas, el instrumento empleado fue un cuestionario de seis ítems de opción múltiple y un problema abierto tomado de anteriores exámenes parciales. **Resultados:** La evidencia señala que el 16% mostró dificultades en dar prioridad a las operaciones, el 25% no utiliza adecuadamente la lógica de segundo orden discernir propiedades y axiomas, el 15% utiliza esquemas y diagramas relacionales para relacionar conjunto, operación binaria y axiomas. Además, el 24% utiliza la secuencia: analogía, construcción y abstracción; como vía de construcción del objeto matemático espacio vectorial. Por último, se identificó que el 20% de los estudiantes no tiene idea sobre la existencia de estructuras aritméticas y no pueden aprender nuevas ideas referidas a operaciones binarias sin dejar de lado las viejas ideas de operaciones con números reales. **Conclusiones:** Se identificó que el 80% de los estudiantes conciben el concepto de espacio vectorial como visiones implícitas y enunciados explícitos que toman forma cuando se trazan los procesos didácticos que involucran la analogía, la construcción y la abstracción. Donde, la lógica de segundo orden y los símbolos, son el medio para las representaciones externas y manipulaciones constante del significado y el significante. El 20% de los estudiantes se encuentran en una etapa de maduración mental, se resisten a dejar su paradigma de estructuras aritméticas numéricas y como consecuencia de ello, el proceso constructivo representacional de espacio vectorial se encuentra en una etapa de reconstrucción en relación a los modelos de referencia.

Palabras clave: Espacio vectorial, estructura algebraica, pensamiento abstracto, vector

ABSTRACT

Objective: To evaluate the learning of the concept of vector space in students of industrial engineering and systems under the mental structures approach. **Methodology:** The research is quantitative, prospective and exploratory. The study sample included 75 students of the Faculty of Industrial, Systems and Computing Engineering. The instrument used was a multiple-choice six-item questionnaire and an open problem taken from previous partial exams. **Results:** The evidence indicates that 16% showed difficulties in giving priority to operations, 25% do not adequately use second-order logic to discern properties and axioms, 15% use schemas and relational diagrams to relate sets, binary operations and axioms. In addition, 24% use the sequence: analogy, construction and abstraction; as a way of constructing the vector space mathematical object. Finally, it was identified that 20% of the students don't have idea about the existence of arithmetic structures, they can't learn new ideas related to binary operations without leaving aside the old ideas of operations with real numbers. **Conclusions:** It was identified that 80% of the students conceive the concept of vector space as implicit visions and explicit statements that take shape when the didactic processes that involve analogy, construction and abstraction are traced. Where, second order logic and symbols are the means for external representations and constant manipulations of the signified and the signifier. The 20% of the students are in a stage of mental maturation, they resist leaving their paradigm of numerical arithmetic structures and as a consequence, the representational construction process of vector space is in a reconstruction stage in relation to the reference models.

Keywords: Vector space, algebraic structure, abstract thought, vector.

Recibido 10/01/2023 Aprobado 16/02/2023

[1] Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión, Perú. hherrera@unjfsc.edu.pe, ORCID: 0000-0002-7739-3012. mtrejo@unjfsc.edu.pe ORCID: 0000-0002-2755-9950. msalcedor@unjfsc.edu.pe ORCID: 0000-0001-7790-6482. pinto@unjfsc.edu.pe ORCID: 0000-0002-4213-5291. jbroncano@unjfsc.edu.pe. ORCID: 0000-0002-7148-4554.
[2] Universidad Nacional de Ingeniería, vhuancas@uni.edu.pe ORCID: 0009-0006-7615-3726

INTRODUCCIÓN

La definición de espacio vectorial es de crucial importancia para comprender la esencia ontológica del álgebra lineal, tal como lo señala Cabrera y otros (2021) al sostener que “el concepto de espacio vectorial es una especie de metaconcepto que unifica varios otros conceptos” (p.137). Además, Dorier (2001) señala que “el concepto espacio vectorial, desde un punto de vista epistemológico, más que ayudar a resolver nuevos problemas es visto como un concepto unificador, generalizador y formalizador” (p. 579). Por lo tanto, el espacio vectorial puede ser entendido como un arquetipo y, en consecuencia, como objeto en el sentido platónico.

Por lo antes señalado, propiciar su construcción cognitiva en los estudiantes de Ingeniería Industrial y Sistemas requiere del análisis retrospectivo y exploratorio de los procesos mentales involucrados en sus estructuras cognitivas durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por tal motivo, la investigación se sustentó en dos teorías científicas, EOS (enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática) formulada por Godino y Batanero (1994), y la segunda llamada APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) creada por Dubinsky (1996). Roldan y otros (2020) señalan que: “EOS describe la comprensión y la coincidencia entre los significados institucional y personal del objeto matemático. La comprensión crece con el aprendizaje y la experiencia. También se refiere a diferentes elementos del significado del objeto (problemas, lenguaje, definiciones y propiedades, procedimientos)” (p.104).

Mientras que Kú y otros (2019) al citar a Dubinsky (1996) indica que: “El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos organizándolos en esquemas a fin de afrontar las situaciones” (p.68).

Soto (2003) sostiene que: “Los estudiantes generalmente realizan los procedimientos algorítmicos sin comprender el significado conceptual y sin saben relacionar sus diferentes representaciones semióticas” (p.34).

Por su parte Montenegro (2020) señala que: “El concepto de espacio vectorial resulta difícil para los alumnos debido a su naturaleza abstracta, tiene un estatus epistemológico diferente al de la mayoría de los conceptos que se enseñan en la universidad e implica la formalización de conocimientos previos” (p. 39).

Por tanto, con la finalidad de apoyar el proceso de enseñanza del álgebra lineal, es necesario responder la siguiente pregunta: ¿Qué construcciones cognitivas han desarrollado los estudiantes de Ingeniería Industrial y Sistemas acerca del concepto de espacio vectorial durante el proceso de su aprendizaje?

METODOLOGÍA

La población de estudio estuvo conformada por los estudiantes de la carrera profesional de Ingeniería Informática de la Facultad de Ingeniería Industrial, Sistemas e Informática de la UNJFSC y estudiantes de la carrera profesional de Ingeniería Industrial y de Sistemas de la Facultad de Ingeniería Industrial de la UNI. La muestra corresponde al total de estudiantes del segundo ciclo que registraron matrícula del curso de Álgebra Lineal durante el semestre académico 2022-1. El muestreo es no aleatorio y estuvo conformado por 35 estudiantes de la UNJFSC (universidad ubicada en la provincia de Huaura) y 40 estudiantes de la UNI (universidad ubicada en el departamento de Lima). Por tanto, el estudio es exploratorio y no se pretende extender las conclusiones a una población más amplia.

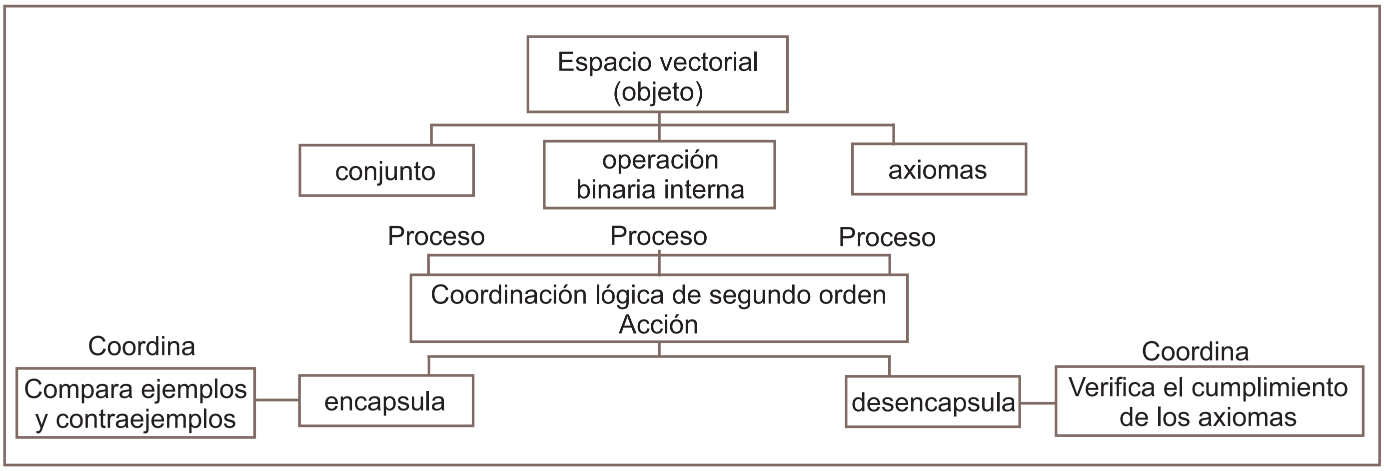
Los indicadores utilizados para determinar las dificultades de aprendizaje relacionados con el concepto de espacio vectorial son los propuestos por Godino (2020) “conocimiento del objeto matemático, significado del objeto matemático para un sujeto en un momento y circunstancias dada” (p. 52), además de los propuestos por Oktaç (2016) “descomposición genética del objeto matemático y momentos de la experiencia de aprendizaje” (p. 298). Los instrumentos utilizados para obtener información acerca de estos indicadores son: descomposición genética del espacio vectorial, logro de la sesión de clase según la taxonomía de Bloom, momentos de la experiencia de aprendizaje, cuestionario de 5 ítems y entrevistas con los estudiantes.

El cuestionario utilizado fue construido partiendo de los descritos en Sukestiyarno y otros (2020) y Jupri y otros (2017). Para validar el cuestionario se utilizó el proceso de validación por juicio de expertos y para analizar la confiabilidad se utilizó el Alfa de Cronbach obteniendo un valor de .78, con el cual se asegura la coherencia interna y la fiabilidad. Se diseñó una entrevista semiestructurada según el enfoque planteado por Díaz y otros (2013) “para ahondar en los aspectos que el cuestionario no reveló y que no consideró en profundidad, específicamente algunas construcciones y mecanismos mentales” (p. 164). La intención de cada una de las preguntas diseñadas para la entrevista fue analizada y consensuada por todos los investigadores y compuesta por 10 preguntas una de las cuales fue de tipo abierto.

1. Descomposición genética del espacio vectorial

Figura 1

Descomposición genética del espacio vectorial



Nota: El gráfico representa una mirada del esquema estructural del espacio vectorial. Elaboración propia

2. Logro de la sesión de clase

Al finalizar la sesión, el estudiante identifica y diferencia si un conjunto es un espacio vectorial verificando el cumplimiento de cada uno de sus axiomas.

3. Descripción del cuestionario

Pregunta 1.
Sea $\{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x, y, z < 0\}$
un conjunto con las operaciones:
$\forall u = (x, y, z), v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \implies u \oplus v = (xa, yb, zc)$
Dado, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \lambda \otimes u = \left(x^\lambda, \sqrt[\lambda]{y}, z^\lambda\right)$.
Hallar: $4 \otimes \left[(1, -4, \pi) \oplus \left(\frac{1}{2}, 3{,}5)\right)\right]$

Pregunta 2.
Sea $\mathbb{R}^4$ el conjunto donde se define la operación:
$\forall u = (x, y, z, w), v = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \Longrightarrow$
$u \oplus v = (x + a, y - 2b, -z - c, 2w + 2d)$
Dado, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{R}^4 \Longrightarrow \lambda \otimes u = (\lambda x, -\lambda y, \lambda z, -\lambda w)$.
¿ $\mathbb{R}^4$ con las operaciones definidas anteriormente es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

Pregunta 3.
Sea $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), +)$
el grupo de matrices de orden $n \times n$.
¿Qué le falta para ser un espacio vectorial?

Pregunta 4.
Dado el conjunto
$V = \{(2{,}3) + t(1, -1); t \in \mathbb{R}\}$.
¿Le falta algo para ser un espacio vectorial?

Pregunta 5. ¿Es posible definir un espacio vectorial que tenga solo un elemento? ¿Por qué?

4. Entrevista semiestructurada

Las preguntas 1 y 2, buscan indagar la concepción que posee un estudiante con respecto a las operaciones binarias definidas en un espacio vectorial, ya que en él tendrá que dar prioridad a las operaciones para justificar el porqué es un espacio vectorial.

Las preguntas 3 y 4, cuestionan si el conjunto dado forma un espacio vectorial bajo las operaciones señaladas o es necesario que estas cumplan ciertas condiciones (generalmente llamadas axiomas).

La pregunta 5, busca indagar la comprensión de la descomposición genética del espacio vectorial, pues en ella se exige el concepto de operación binaria interna y externa, así como el cumplimiento de ciertos axiomas para llegar a construir el concepto de espacio vectorial.

Las preguntas 6, 7 y 8, buscan observar el tipo de construcción mental que tiene el alumno en relación al esquema conceptual de espacio vectorial y a los axiomas que verifican su existencia como objeto matemático.

Las preguntas 9 y 10, permiten generar un panorama general acerca de las construcciones mentales de los alumnos respecto al papel que juegan el espacio vectorial y el grupo, como estructuras algebraicas próximas donde su existencia quedan subordinadas al cumplimiento de ciertos axiomas sobre las operaciones binarias.

Tabla 1
Preguntas propuestas del cuestionario

N°	Preguntas
1	¿Un conjunto y una operación binaria interna pueden formar un espacio vectorial? Explique.
2	¿Un conjunto con una operación binaria interna y una operación binaria externa, forman un espacio vectorial? Muestre un ejemplo.
3	¿Los axiomas de un espacio vectorial son aplicados a los elementos del conjunto? Explique.
4	¿Los axiomas de un espacio vectorial son independientes del conjunto donde se define? Muestre ejemplos.
5	¿Para definir un espacio vectorial se necesita de dos conjuntos y dos operaciones, una binaria interna y otra externa? Explique el porqué.
6	¿Es posible definir el espacio vectorial por ciertas características de sus elementos? Explique.
7	¿Un espacio vectorial queda caracterizado por sus elementos, las operaciones definidas en el conjunto o por el cumplimiento de sus axiomas? Explique.
8	¿Existe el espacio vectorial vacío? Explique.
9	¿Qué diferencia encuentra entre un grupo y un espacio vectorial? Explique y sustente mediante un ejemplo.
10	A partir de un grupo defina que es un espacio vectorial.
11	Pregunta abierta: ¿Para ti existen muchos espacios vectoriales o solo uno? Explique.

Nota: Esta tabla muestra las preguntas de la entrevista

La entrevista aborda preguntas de tipo cerradas, abiertas e interpretativas. La primera parte de las preguntas buscó aclarar algunos aspectos de las respuestas que habían quedado poco claras, dudosas o no habían sido explicitadas detalladamente durante el desarrollo del cuestionario. Es necesario indicar que el enfoque fue el esclarecimiento de respuestas contradictorias la que buscó la explicación por parte del estudiante las posibles causas de dichas incoherencias.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Del total de 75 estudiantes de la carrera profesional de Ingeniería Informática de la Facultad de Ingeniería Industrial, Sistemas e Informática de la Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión y estudiantes de la carrera profesional de Ingeniería Industrial y de Sistemas de la Facultad de Ingeniería Industrial de la UNI; el 16% mostró dificultades en dar prioridad a las operaciones, el 25% no utiliza adecuadamente la lógica de segundo orden para discernir propiedades y axiomas, el 15% utiliza esquemas y diagramas relacionales para relacionar conjuntos, operaciones binarias y axiomas. Además, el 24% utiliza la secuencia de analogía, construcción y abstracción, como vía de construcción del objeto matemático espacio vectorial. Por último, se identificó que el 20% de los estudiantes no tiene idea sobre la existencia de estructuras aritméticas, no pueden aprender nuevas ideas referidas a operaciones binarias sin dejar de lado las viejas ideas de operaciones con números reales.

Los resultados de esta investigación reafirman la conclusión de Sukestiyarno y otros (2020), quienes sostienen que “los estudiantes no reconocen una estructura particular por falta de estructuras mentales previas y necesarias” (p. 1060). Y complementa la conclusión obtenida por Oktac (2016) quien manifiesta que “El sentido de la estructura se puede describir según el nivel de estudios involucrados, aplicado a elementos de conjuntos y la noción de operación binaria y aplicado a las propiedades de las operaciones binarias” (p. 310).

Así mismo confirma el punto de vista de la Teoría APOE, cuando dice que un estudiante que no ha desarrollado las estructuras mentales necesarias, le será de poca utilidad que recuerde las definiciones de un concepto”.

Pero contradice la propuesta de EOS la misma que afirma que la correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde interviene tal objeto se interpreta como el significado de dicho objeto.

CONCLUSIÓN

Del análisis y la discusión se identificó que el 80% de los estudiantes conciben el concepto de espacio vectorial como visiones implícitas y enunciados explícitos que toman forma cuando se trazan los procesos didácticos que involucran la analogía, la construcción y la abstracción. Donde, la lógica de segundo orden y los símbolos, son el medio para las representaciones externas y manipulaciones constante del significado y el significante. El 20% de los estudiantes se encuentran en una etapa de maduración mental, se resisten a dejar su paradigma de estructuras aritméticas numéricas y como consecuencia de ello, el proceso constructivo representacional de espacio vectorial se encuentra en una etapa de reconstrucción en relación a los modelos de referencia.

Por lo tanto, la construcción mental del concepto espacio vectorial de los estudiantes presentan obstáculos tales como la falta de metodologías que involucren el esquema analogía, construcción y abstracción para evolucionar progresivamente hacia el objeto, falta de enfoque para elaborar las prácticas matemáticas sobre un trasfondo de relatividad institucional, personal y contextual, falta de diseño instruccional significativo porque la transmisión del conocimiento articulando significado y significante, falta de diseño de las trayectorias de aprendizaje que configuren la trama de acciones docente-discentes y medios usados para abordar situaciones problemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cabrera, A, Sánchez, M., Trigueros, M. (2021). Estado del conocimiento didáctico sobre el concepto de espacio vectorial. *Educ. Mat 33(3),* p. 121-140. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2448-80892021000300121&lng=es&nrm=iso

Díaz, L.; Torruco, U.; Martínez, M; Varela, M. (2013). La entrevista, recurso flexible y dinámico. *Metodología de investigación en educación médica. 2(7),* p. 162-167. Recuperado de https://www.redalyc.org/exportarcita.oa?id=349733228009

Dorier, J., y Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En D. Holton (Ed.), The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study (pp. 255–273). Kluwer. http://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_24

Dubinsky, E. (1996). Una aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática postsecundaria. *Educación Matemática, 8 (3),* p. 24-41. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/rev

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3),* 325-355. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-emioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J. y Batanero, C.; Font, V (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12 (2),* 47-59. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25

Guanga, D., Sarmiento, L.y Inca, M. (2019). Construcción cognitiva del espacio vectorial abstracto con estudiantes de Ingeniería. *Revista Ciencia Digital, 3 (3),* 258-274. https://doi.org/10.33262/cienciadigital.v3i3.2.1.817

Jupri, A & Sispiyati, D. (2017). Expert strategies in solving algebraic structure sense problems: The case of quadratic equations. Journal of Physics: Conference Series, 812, 012093. https://doi.org/10.1088/1742-6596/812/1/012093.

Kú, D., Trigueros, M., y Oktac, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática, 20(2),* pp. 65-89. URL Oficial: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/rev.

Montenegro, F; Gagliardo, A; Mangini, S y Carrasco, A. (2020). El aprendizaje de Espacios Vectoriales en Álgebra Lineal: Una mirada desde la teoría APOE. *Revista Brazilian Journal of Development , 6 (11),* 84339-84351. https://doi.org/10.34117/bjdv6n11-009

Oktaç. C. (2016). Abstract algebra learning: mental structures, definitions, examples, proofs and structure sense. *Annales de didactique et de sciences cognitives 21(1), p.297 - 316.* https://doi.org/10.4000/adsc.844

Roldán, A., M., Batanero, C., y Álvarez, R. (2020). Comprensión del intervalo de confianza por estudiantes de Bachillerato. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, *18 (1),* 103-117. https://doi.org/10.35763/aiem22

Sánchez, M., y Trigueros, M. (2021). Estado del conocimiento didáctico sobre el concepto de espacio vectorial. *Revista educación matemática*, *33 (3),* 121-140. https://doi.org/10.24844/EM3303.05

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Student's Thinking in Linear Algebra. En J. Dorier, & C. M. University (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra (p. 209-246). Michigan: Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Soto, J. (2003). Un estudio sobre las dificultades para la conversión gráfico-algebraica relacionadas con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales en R2 y R3. Tesis para optar por el grado de Doctor en Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional, CINVESTAV, México, D.F.

Sukestiyarno, J; Mulyono, L; y Dwidayati, N. (2020). The Process of Structure Sense of Group Prerequisite Material: A Case in Indonesian Context. *European Journal of Educational Research, 9(3)*, 1047 - 1061. https://doi.org/10.12973/eu-jer.9.3.1047